UNIVERSITI SAINS MALAYSIA

Peperiksaan Semester Kedua
Sidang Akademik 2002/2003

Februari/Mac 2003

JIM 213/4 – Persamaan Pembezaan I

Masa : 3 jam

Sila pastikan bahawa kertas peperiksaan ini mengandungi **LIMA** muka surat yang bercetak sebelum anda memulakan peperiksaan ini.

Jawab SEMUA soalan.

Setiap jawapan mesti dijawab di dalam buku jawapan yang disediakan.

Baca arahan dengan teliti sebelum anda menjawab soalan.

Setiap soalan diperuntukkan 100 markah.

1. (a) Selesaikan persamaan pembezaan

$$\frac{dy}{dx} = e^{3x+2y}.$$

(30 markah)

(b) Tunjukkan persamaan

$$\left(1 - \frac{3}{x} + y\right)dx + \left(1 - \frac{3}{y} + x\right)dy = 0$$

adalah tepat. Dengan ini, cari penyelesaiannya.

(45 markah)

(c) Tentusahkan bahawa fungsi $y_1 = x^3$ dan $y_2 = x^4$ adalah penyelesaian asas bagi persamaan

$$x^2y'' - 6xy' + 12y = 0$$

dalam selang $(0, \infty)$.

(25 markah)

2. (a) Bincangkan dengan jelas bagaimana anda akan menyelesaikan (penyelesaian yang lengkap tidak diperlukan) persamaan

$$\frac{dy}{dx} = \frac{ax + by + h}{cx + dy + k}$$

dengan a, b, c, d adalah pemalar bukan sifar manakala h dan k adalah pemalar bagi setiap kes berikut:

(i) $h = 0,\ k = 0.$

(ii) $ad - bc = 0,\ h \neq 0,\ k \neq 0.$

(iii) $ad - bc \neq 0,\ h \neq 0,\ k \neq 0.$

(45 markah)

(b) Huraikan takrifan 'homogen' bagi

(i) persamaan pembezaan peringkat pertama.

(ii) persamaan pembezaan peringkat kedua.

(20 markah)

(c) Dengan menggunakan kaedah koefisian belum tentu, tentukan bentuk penyelesaian khusus bagi persamaan (penyelesaian lengkap tak diperlukan)

(i) $y'' + 4y = 3\cos 2t$.

(ii) $y'' - 2y' + 5y = e^x \cos 2x$.

(35 markah)

3. (a) Andaikan fungsi f adalah penyelesaian bagi masalah nilai awal

$$y' = x^2 + y^2$$
$$y(1) = 2.$$

Cari nilai $f'(1)$, $f''(1)$ dan $f'''(1)$.

(30 markah)

(b) Jelmaan Laplace bagi fungsi f(t) ditakrifkan oleh

$$\mathscr{L}\{f(t)\} = \int_0^\infty e^{-st} f(t)\, dt.$$

Dengan menggunakan takrifan ini, cari jelmaan Laplace bagi fungsi f(t) yang ditakrifkan oleh

$$f(t) = \begin{cases} 0 \ , & 0 < t < 1 \\ t \ , & 1 < t < 2 \\ 0 \ , & t > 2 \end{cases}$$

(25 markah)

(c) Dengan menggunakan perubahan pembolehubah $x = e^t$, tunjukkan persamaan pembezaan

$$x^2 \frac{d^2y}{dx^2} + x\frac{dy}{dx} - k^2y = 0$$

dengan k adalah pemalar, boleh diturunkan kepada persamaan homogen peringkat kedua dengan koefisien pemalar. Seterusnya, tunjukkan penyelesaian amnya ialah

$$y = Ax^k + Bx^{-k}$$

dengan A dan B adalah pemalar.

(45 markah)

4. Diberi sistem persamaan pembezaan linear

$$\frac{dx}{dt} + 2x - 2y - 2z = 0$$
$$\frac{dy}{dt} - 2x + 5y - z = 0$$
$$\frac{dz}{dt} - 2x - y + 5z = 0.$$

(a) Tuliskan semula sistem berkenaan dalam bentuk persamaan matriks

$$\frac{dX}{dt} = AX$$

dan nyatakan matriks A, jika vektor lajur $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$.

(15 markah)

(b) Tunjukkan $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ adalah vektor eigen bagi matriks A dan nyatakan nilai eigen yang bersepadan.

(20 markah)

(c) Tunjukkan $\alpha\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \beta\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$ adalah vektor eigen untuk sebarang nilai pemalar α dan β. Apakah nilai eigen yang bersepadan?

(35 markah)

(d) Dapatkan matriks penyelesaian asas bagi sistem berkenaan.

(15 markah)

(e) Tuliskan penyelesaian am bagi sistem tersebut.

(15 markah)

5. (a) Fungsi Heaviside ditakrifkan oleh

$$H(t-2) = \begin{cases} 0 \ , \ 0 \le t < 2 \\ 1 \ , \ t \ge 2 \end{cases}$$

Tuliskan fungsi

$$f(t) = \begin{cases} e^t \ , \ 0 \le t < 2 \\ 0 \ , \ t \ge 2 \end{cases}$$

dalam sebutan fungsi H(t - 2).

(20 markah)

(b) Dengan menggunakan jelmaan Laplace, selesaikan masalah nilai awal

$$y'' - 3y' - 4y = f(t)$$
$$y(0) = 0, \ y'(0) = 0$$

dengan f(t) diberi dalam (a).

(80 markah)

- ooo0ooo -